Zur Berechnung der Obligationenrenditen im Statistischen Monatsheft der SNB

von Robert Müller, Ressort Statistik, Schweizerische Nationalbank, Zürich

Die Schweizerische Nationalbank (SNB) begann im Jahre 2000 mit der Publikation von Obligationenrenditen, die nicht mehr auf dem Konzept der Durchschnittsrendite eines Obligationenkorbes, sondern auf jenem der Fälligkeitsstruktur der Zinssätze basieren. Die neuen Daten verstehen sich als Renditen von Diskontanleihen, d.h. von couponlosen Anleihen (engl. *discount bond* oder *zero-coupon bond*). Renditen von Diskontanleihen werden auch als Kassazinssätze bezeichnet. Daten dieser Art liefern die Basis für verschiedene Berechnungen (Zinserwartungen, Inflationserwartungen), die in der geldpolitischen Lagebeurteilung aller Zentralbanken eine wichtige Rolle spielen (siehe z. B. Heller, 1997).

Da am schweizerischen Kapitalmarkt kaum Diskontanleihen ausgegeben werden und die Zins- und Kapitalansprüche aus Couponobligationen auch nicht separat gehandelt werden, müssen die Kassazinssätze aus den Preisen von Couponobligationen hergeleitet werden. Dafür stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Für die im Statistischen Monatsheft publizierten Renditen verwendet die SNB das von Svensson (1994, 1995) erweiterte Verfahren von Nelson und Siegel (1987).

Die berechneten Kassazinssätze können der Tabelle E3 des Statistischen Monatshefts entnommen werden. Die Tabelle zeigt die Renditen von synthetischen Diskontanleihen der Eidgenossenschaft mit Restlaufzeiten von 2, 5, 10, 20 und 30 Jahren.[1] Ausserdem werden für eine einheitliche Restlaufzeit von 8 Jahren die Renditen von synthetischen Diskontanleihen verschiedener Schuldnerkategorien ausgewiesen. Dabei werden neben fünf inländischen Schuldnerkategorien («Eidgenossenschaft», «Kantone», «Pfandbriefinstitute», «Geschäftsbanken [inkl. Kantonalbanken]» sowie «Industrie [inkl. Kraftwerke] und Handel») drei Kategorien ausländischer Schuldner nach ihrer Bonität unterschieden (Ratingklassen gemäss Standard and Poor's AAA, AA und A). Mit der Publikation der neuen Renditen wurde im August 2000 für die Obligationen der Eidgenossenschaft und im Februar 2001 für die Obligationen der übrigen Schuldnerkategorien begonnen.[2] Die kompletten Datenreihen, die im Internet unter www.snb.ch gefunden werden können, beginnen im Januar 1998 (Eidgenossenschaft) bzw. im Januar 2001 (übrige Schuldnerkategorien).

Vor dem Wechsel zum neuen Berechnungsverfahren waren die publizierten Renditen als Durchschnitt von auf Fälligkeit berechneten Renditen eines festen Korbes von Obligationenanleihen berechnet worden. Die Rendite auf Fälligkeit bezog sich damit auf Wertpapiere mit unterschiedlichen Coupons und unterschiedlichen Restlaufzeiten. Die durchschnittliche Restlaufzeit änderte sich im Laufe des Jahres kontinuierlich und im Zeitpunkt der jährlichen Neudefinition des Obligationenkorbes sprunghaft. Die Neudefinition, die jeweils zu Beginn des Jahres erfolgte, war regelmässig mit einer sprunghaften Veränderung der durchschnittlichen Restlaufzeit und der berechneten Durchschnittsrendite verbunden.

Der vorliegende Aufsatz erläutert die Grundlagen zur Berechnung der publizierten Obligationenrenditen. Der erste Teil beginnt mit einer kurzen Beschreibung der Ausgangslage und der gewählten Methode (Abschnitt 1.1). Daran anschliessend werden die Bildung der Schuldnerkategorien und die Kriterien zur Wahl der Anleihen und der Kurse (Abschnitt 1.2) erläutert. Der erste Teil schliesst mit Berechnungen zur Zuverlässigkeit der Schätzungen (Abschnitt 1.3). Der zweite Teil des Aufsatzes enthält eine ausführlichere Beschreibung der von der SNB angewandten Methode zur Schätzung der Fälligkeitsstruktur der Zinssätze aufgrund der Preise von Couponobligationen.

1 Die zum Vergleich ausgewiesenen Renditen der deutschen Staatsanleihen und der US-Treasury Bonds werden von der Deutschen Bundesbank bzw. der amerikanischen Federal Reserve berechnet und deshalb in diesem Aufsatz nicht behandelt.

2 Die Tabellen wurden seit August 2000 mehrmals neu gestaltet. Von August 2000 bis Januar 2001 wurden die neu berechneten Renditen in Tabelle $D4_2$ unter dem Titel «Kassa-Zinssätze für Obligationen der Eidgenossenschaft» publiziert, während Tabelle $D4_1$ die auf der alten Methode basierenden «Durchschnittsrenditen von Obligationen inländischer Schuldner» auswies. Von Februar 2001 bis November 2001 zeigte Tabelle $D4_1$ die «Kassa-Zinssätze bei verschiedenen Laufzeiten für Obligationen der Eidgenossenschaft, Staatsanleihen in Euro und US-Treasury Bonds», während Tabelle $D4_2$ die «Kassa-Zinssätze von CHF-Anleihen verschiedener Schuldnerkategorien mit einer Laufzeit von 8 Jahren» zusammenfasste. Seit Dezember 2001 zeigt Tabelle E3 unter dem Titel «Renditen von Obligationen» die zuvor in $D4_1$ und $D4_2$ ausgewiesenen Datenreihen.

1 Hintergrund und Grundelemente

1.1 Problemstellung

Bei den in der Schweiz gebräuchlichen Obligationenanleihen handelt es sich in der Regel um sogenannte Couponobligationen. Eine Couponobligation mit einer Laufzeit von m Jahren verspricht neben der Rückzahlung des Nennwertes N nach m Jahren jährliche Zinszahlungen in der Höhe des Couponbetrages c. Jede Couponobligation kann mit anderen Worten auch als ein Portefeuille von Diskontanleihen betrachtet werden. Analog zur traditionellen Bewertung von Investitionen kann der Preis einer Couponobligation als der mit den Kassazinssätzen abdiskontierte Gegenwartswert (Barwert) zukünftiger Zahlungsströme verstanden werden. Wir erhalten also

$$(1)\quad P(t,m)=\frac{c}{(1+R_{t,1})}+\frac{c}{(1+R_{t,2})^2}+\ldots+\frac{c}{(1+R_{t,m})^m}+\frac{N}{(1+R_{t,m})^m}=\sum_{k=1}^{m}\frac{c}{(1+R_{t,k})^k}+\frac{N}{(1+R_{t,m})^m},$$

wobei $P(t,m)$ den Preis im Zeitpunkt t bei einer Restlaufzeit von m Jahren und $R(t,k)$ für k = 1, 2, ... m den Zinssatz einer Diskontanleihe mit Fälligkeit in k Jahren bezeichnen.

Die Sequenz der Kassazinssätze $R(t,k)$ wäre direkt beobachtbar, wenn auf dem schweizerischen Kapitalmarkt eine grosse Zahl von Diskontanleihen mit unterschiedlichen Restlaufzeiten gehandelt würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. Auf dem schweizerischen Kapitalmarkt werden fast keine Diskontanleihen ausgegeben. Ausserdem gibt es in der Schweiz – im Unterschied etwa zu Deutschland – auch keine Möglichkeit, die aus einer Obligation resultierenden Ansprüche (Rückzahlung des Nennwertes, Couponzahlungen) einzeln zu handeln. Die Kassazinssätze können somit nicht direkt beobachtet werden und müssen deshalb geschätzt werden.

Bevor wir uns den zu diesem Zwecke vorgeschlagenen Methoden zuwenden, soll noch kurz die Beziehung zwischen den Kassazinssätzen und den Renditen nach Fälligkeit betrachtet werden. Wie eingangs erwähnt bildeten Fälligkeitsrenditen die Basis der von der SNB bis vor kurzem berechneten und publizierten Durchschnittsrenditen. Die Rendite nach Fälligkeit kann definiert werden als der Diskontsatz, der den Barwert aller Zahlungsströme aus einer Couponobligation mit dem Preis dieser Obligation zur Deckung bringt. Sie ist somit gleich R_t in der Gleichung

$$(2)\quad P(t,m)=\frac{c}{(1+R_t)}+\frac{c}{(1+R_t)^2}+\ldots+\frac{c}{(1+R_t)^m}+\frac{N}{(1+R_t)^m}=\sum_{k=1}^{m}\frac{c}{(1+R_t)^k}+\frac{N}{(1+R_t)^m}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Gleichungen (1) und (2) zusammenfallen, wenn die Kassazinssätze $R_{t,k}$ für k = 1, 2, ..., m alle gleich sind, die Fälligkeitsstruktur der Zinssätze also völlig flach verläuft. Anders verhält es sich, wenn die Zinsstruktur steigt oder fällt. Wenn die Zinsstruktur über das ganze Laufzeitenspektrum steigend ist, liegt der Kassazinssatz für gleiche Fälligkeiten immer über der Rendite nach Fälligkeit R_t. Weist die Zinsstruktur indessen einen fallenden Verlauf auf, so liegen die Kassazinssätze immer tiefer als die Renditen nach Fälligkeit.[3]

In der Literatur wurden verschiedene Ansätze entwickelt, wie die Fälligkeitsstruktur der Zinssätze aus den zur Verfügung stehenden Marktdaten empirisch hergeleitet werden kann. Drei grundlegende Modelle bzw. Methoden sind zu unterscheiden, nämlich Regressionsmodelle, Zinsstrukturmodelle und das sogenannte «Bootstrapping».[4] Die meisten Zentralbanken schätzen die Zinsstruktur mit einem Regressionsansatz, wobei das Nelson-Siegel-Svensson-Verfahren im Vordergrund steht.

Das Nelson-Siegel-Svensson-Verfahren trifft eine Annahme über den funktionalen Zusammenhang zwischen Laufzeit und Kassazinssatz, der als

$$(3)\quad R_{Svensson}(t,m,\beta)=\beta_0+\beta_1\left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m}\right)+\beta_2\left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m}-\exp(-\gamma_1 m)\right)+\beta_3\left(\frac{1-\exp(-\gamma_2 m)}{\gamma_2 m}-\exp(-\gamma_2 m)\right)$$

geschrieben werden kann.[5] Gleichung 3 drückt also den Kassazinssatz als Funktion des Parametervektors β=($\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2$) und der Restlaufzeit m aus. Sind die Parameter bekannt, so ist jeder Laufzeit ein Kassazinssatz $R_{Svensson}(t,m)$ zugeordnet. Damit können dann die Barwerte der Couponzahlungen und der Rückzahlung der Obligation berechnet werden, indem die Zahlungsströme gemäss Gleichung (1) mit den entsprechenden Kassazinssätzen abdiskontiert werden. Dies ergibt theoretische (geschätzte) Preise für die Coupons und den Rückzahlungswert. Damit wiederum ist auch der theoretische (geschätzte) Preis der Couponobligation bestimmt.

3 Beachte auch, dass die Renditen nach Fälligkeit von zwei Obligationen, welche bei gleicher Restlaufzeit m unterschiedliche Coupons c aufweisen, nur dann gleich gross sind, wenn die Zinsstruktur flach ist (siehe z.B. Bodie und Merton (1998, Kapitel 8).

4 Zinsstrukturmodelle und «Bootstrapping» werden in Campbell, Lo und MacKinlay (1997, Kapitel 11) und Hull (1997, Kapitel 17) behandelt.

5 Die Herleitung von Gleichung 3 erfolgt im zweiten Teil dieses Aufsatzes (siehe 2.1).

Die Schätzung erfolgt mittels einer Optimierungsprozedur, welche die zu schätzenden Parameter der Gleichung (3) und damit die Kassazinssätze so lange variiert, bis die quadrierten Abstände zwischen beobachteten und geschätzten (theoretischen) Preisen der Couponobligationen minimiert sind. Eine Alternative zur Minimierung auf den Preisen ist die Minimierung auf den Renditen nach Fälligkeit. In diesem Fall werden aus den theoretischen Preisen der Couponobligationen die (theoretischen) Renditen nach Fälligkeit berechnet und die Kassasätze werden wiederum analog zur Preisminimierung mittels eines Optimierungsverfahrens geschätzt. Die von der SNB im Monatsheft publizierten Renditen basieren auf dieser Variante des Nelson-Siegel-Svensson-Verfahrens.

Die Stärken des Nelson-Siegel-Svensson-Verfahrens sind erstens der glatte kontinuierliche Verlauf der geschätzten Zinskurve, die dennoch genügend flexibel ist, um die auf dem Markt beobachtete Datenstruktur ausreichend genau wiederzugeben, zweitens die Möglichkeit, auch mit wenig Beobachtungen eine Zinsstruktur zu schätzen und drittens die vergleichsweise grosse Unabhängigkeit der Schätzung von Ausreissern. Der zweite Teil dieses Aufsatzes liefert eine ausführlichere Darstellung der Methode und ihrer Umsetzung.

1.2 Die Auswahl der Anleihen und Kurse

Da die Zinskurve den Zusammenhang zwischen Laufzeit und Zinssatz möglichst unverzerrt widerspiegeln soll, ist es notwendig, nur Obligationen zu vergleichen, die bezüglich Bonität des Schuldners möglichst vergleichbar sind. Gleichzeitig besteht allerdings auch ein Bedarf nach Renditen für bestimmte Wirtschaftssektoren. Die SNB hat versucht, beiden Ansprüchen einigermassen gerecht zu werden, indem sie die traditionelle Sektorengliederung bei den Obligationen inländischer Schuldner weitgehend beibehielt und im Segment der Obligationen ausländischer Schuldner eine Gliederung nach Bonität einführte.

Insgesamt wurden acht Klassen gebildet. Diese teilen sich in fünf für inländische und drei für ausländische Schuldner. Bei den inländischen Schuldnern wird unterschieden zwischen (i) der Eidgenossenschaft, (ii) den Kantonen, (iii) den Pfandbriefinstituten, (iv) den Geschäftsbanken (inkl. Kantonalbanken) sowie (v) der Industrie (inkl. Kraftwerke) und dem Handel. Bei den ausländischen Schuldnern wird nach der Klassifikation von Standard & Poor’s zwischen den Bonitätsklassen AAA, AA und A unterschieden. Schuldner mit den Ratings AA+ und AA- bzw. A+ und A- werden ebenfalls den Bonitätsklassen AA bzw. A zugeteilt, da die Zahl der Beobachtungen bei einer feineren Gliederung zu gering für eine Schätzung wäre. Falls kein Rating durch Standard & Poor’s vorliegt, wird auf die Bewertung durch Moody’s abgestellt. Auf die Bildung einer Kategorie für Obligationen von Gemeinden wurde verzichtet, da dieser Sektor bezüglich Risiken zu heterogen ist. Aus dem gleichen Grund sieht die neue Gliederung auch keine Kategorie für Finanzgesellschaften mehr vor.

In die Schätzung werden keine kündbaren Anleihen einbezogen, da das Recht des Schuldners zur vorzeitigen Kündigung Preisabschläge bzw. Renditeaufschläge impliziert.[6] Weiter werden nur Anleihen berücksichtigt, die ein Emissionsvolumen von mindestens 100 Mio. Franken bei inländischen Emittenten und von mindestens 200 Mio. Franken bei ausländischen Emittenten aufweisen. Von der Schätzung ausgeschlossen werden ferner Obligationen, deren Vortagesrenditen den aus der Schätzung gewonnenen Erwartungswert der Rendite um das Vierfache der Standardabweichung über- oder unterschreiten.

6 Im Prinzip entspricht die Preisdifferenz zwischen einer kündbaren und einer unkündbaren Obligation dem Preis einer (europäischen) Call-Option, welche dem Schuldner das Recht einräumt, am Kündigungsdatum zu einem bestimmten Rückzahlungskurs die Obligation zurückzukaufen.

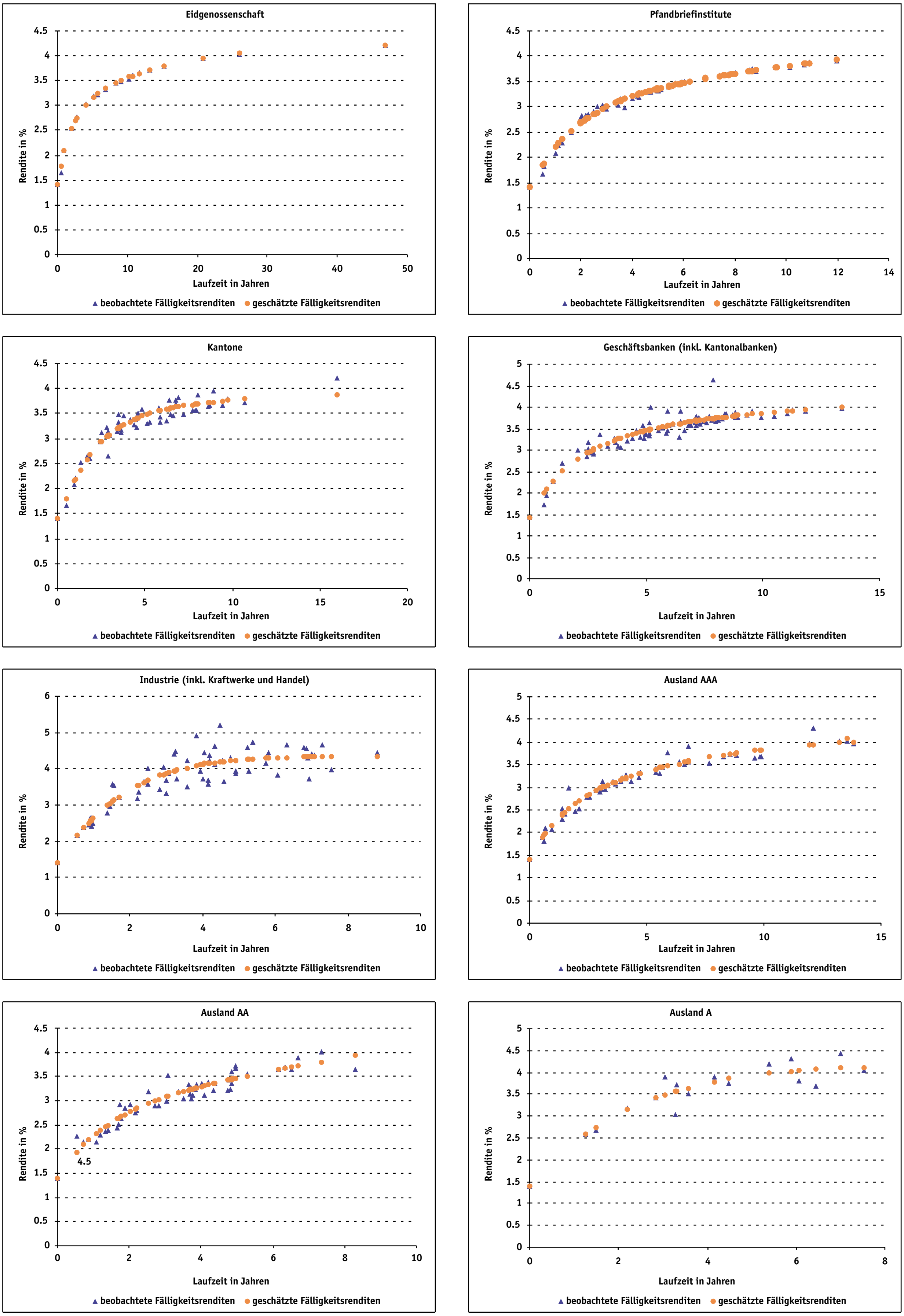
Die Papiere, die in der Schätzung berücksichtigt werden, müssen überdies eine minimale Restlaufzeit aufweisen. Sie beträgt 12 Monate bei den Obligationen der Eidgenossenschaft und 3 Monate bei den übrigen Anleihen. Für kürzere Zeithorizonte werden die Interbankenzinsen für Frankenanlagen am Euro-Markt verwendet. Die längere Mindestrestlaufzeit bei den Obligationen der Eidgenossenschaft lässt sich damit begründen, dass diese Papiere bezüglich Bonität mit den Interbankenanlagen am Euro-Markt besser vergleichbar sind als die Papiere der übrigen Schuldnerkategorien.

Als Datenbasis werden die täglich von FINVEST zur Verfügung gestellten Kurse um 10:30 Uhr verwendet. Falls am Berechnungstag eine Transaktion vorgenommen wurde, wird der realisierte Kurs für die Schätzung genutzt, andernfalls fliesst der Mittelwert zwischen Geld- und Briefkurs in die Schätzung ein. Fehlt der Geldkurs, so wird der Briefkurs (minus 25 Basispunkte) verwendet. Fehlt hingegen der Briefkurs, wird der Geldkurs als Preisgrundlage genutzt. Wenn weder ein Geld- noch ein Briefkurs notiert sind, wird der zuletzt gehandelten Kurs genommen.

Tabelle 1 fasst verschiedene Merkmale der nach Schuldnerkategorien gegliederten Obligationenanleihen zusammen. Stichtag ist der 3. April 2002. Die Tabelle zeigt die Bonität nicht nur der drei ausländischen, sondern auch der fünf inländischen Schuldnerkategorien. Ausserdem wird das Emissionsvolumen sowie die minimale, die maximale und die durchschnittliche Restlaufzeit ausgewiesen. Die Einstufung der Bonität von Obligationen inländischer Schuldner stützt sich in erster Linie wiederum auf die Angaben von Standard & Poor's. Sekundär wurden auch die Ratingverzeichnisse der Zürcher Kantonalbank und von Moody's herangezogen. Damit konnten ungefähr 95% aller Anleihen bewertet werden. Die Zuordnung macht deutlich, dass die Obligationen der Eidgenossenschaft, der Pfandbriefbanken und – definitionsgemäss – der drei Klassen ausländischer Schuldner die grösste Homogenität bezüglich Bonität aufweisen. Deutlich heterogener sind demnach die Obligationen der Kantone, der Geschäftsbanken sowie der Industrie und des Handels.

Merkmale der Frankenanleihen nach Schuldnerkategorien (Stand 3. April 2002) Tabelle 1

	Eidgenossenschaft	Kantone	Pfandbriefinstitute	Geschäftsbanken (inkl. Kantonalbanken)	Industrie (inkl. Kraftwerke) und Handel	Ausland AAA	Ausland AA	Ausland A
Anzahl	18	47	68	76	59	52	50	16
davon: AAA	18	10	68	18		52		
AA (inkl. AA-, AA+)		20		51	13		50	
A (inkl. A-, A+)		17		7	41			16
BBB					1			
durchschnittliche Restlaufzeit in Jahren	11,84	5,63	6,24	6,26	3,92	5,22	3,60	4,24
maximale Restlaufzeit in Jahren	46,75	16,02	11,95	13,36	8,82	13,84	8,28	7,53
minimale Restlaufzeit in Jahren	1,18	1,02	0,53	0,59	0,56	0,55	0,53	0,56
Emissionsvolumen in Mio. Franken (ohne Aufstockungen)	36 524	12 720	32 170	20 510	9 250	19 150	21 175	7 000


Eidgenossenschaft
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Pfandbriefinstitute
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Kantone
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Geschäftsbanken (inkl. Kantonalbanken)
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Industrie (inkl. Kraftwerke und Handel)
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Ausland AAA
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Ausland AA
Rendite in %
4.5
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen
Ausland A
Rendite in %
Laufzeit in Jahren
▲ beobachtete Fälligkeitsrenditen ● geschätzte Fälligkeitsrenditen

1.3 Qualität der Schätzung

Die Qualität der Schätzung kann auf verschiedene Arten illustriert werden. Grafik 1 zeigt für jede der acht Schuldnerkategorien die beobachteten und die geschätzten Renditen nach Fälligkeit. Die geschätzten Renditen nach Fälligkeit basieren auf den geschätzten Kassazinssätzen. Durch Einsetzen der Kassazinssätze in Gleichung 1 kann ein geschätzter Preis der Obligationenanleihe berechnet werden. Durch Einsetzen dieses Preises in Gleichung 2 und unter Anwendung des numerischen Newton-Raphson-Verfahrens erhält man die geschätzte Rendite nach Fälligkeit. Die Grafiken für die acht verschiedenen Schuldnerkategorien zeigen, dass die geschätzten Fälligkeitsrenditen insgesamt zwar recht nahe bei den beobachteten Werten liegen, zwischen den einzelnen Schuldnerkategorien aber doch recht grosse Unterschiede bestehen.

Ein Mass zur Quantifizierung der Differenzen zwischen geschätzten und beobachteten Renditen ist der «Root Mean Squared Yield Error» (RMSYE). Dieser wird als Wurzel des arithmetischen Mittels der quadrierten Differenzen zwischen beobachteten und geschätzten Renditen berechnet. Den geringsten RMSYE erhalten wir mit knapp 2 Basispunkten (0,02%) für die Obligationen der Kategorie «Eidgenossenschaft». Für die andern Kategorien resultieren teilweise deutlich grössere RMSYE, nämlich gut 3 Basispunkte für die «Pfandbriefinstitute», rund 10 Basispunkte für die «Kantone» und die «Geschäftsbanken» sowie 20 Basispunkte für «Industrie und Handel». Im Sektor der Obligationen ausländischer Schuldner ergeben sich RMSYE von 7 Basispunkten für die Kategorie der AAA-Obligationen, von 10 Basispunkten für die AA-Obligationen und von 15 Basispunkten für die A-Obligationen.

Die Differenzen widerspiegeln im Wesentlichen die Homogenität der Schuldnerkategorie und die Liquidität des Marktes. Je höher die Homogenität der Schuldnerkategorie und je liquider der Markt, umso geringer der RMSYE. Der im Vergleich zu den AA- und AAA-Obligationen grössere RMSYE der A-Obligationen ausländischer Schuldner dürfte neben der schlechteren Liquidität die vergleichsweise wenig stabile Bonität der Papiere dieser Kategorie widerspiegeln. Da die Rating-Agenturen Änderungen in der Schuldnerbonität nur verzögert nachvollziehen, sind der Klasse der A-Obligationen ausländischer Schuldner relativ häufig auch Papiere zugeordnet, die in Wahrheit bereits eine höhere oder tiefere Bonität aufweisen.

2 Theoretisches Modell und Schätzmethode

2.1 Das theoretische Modell

Im zweiten Teil dieses Berichts soll nun das Zinsstrukturmodell, das den Renditeberechnungen der SNB zu Grunde liegt, und die Schätzmethode etwas ausführlicher behandelt werden. Der erste Abschnitt (2.1) beschäftigt sich mit dem von der SNB verwendeten Nelson-Siegel-Svensson-Verfahren. Im nächsten Abschnitt (2.2) werden dann die einzelnen Schritte der Schätzung dargestellt.

Den Ausgangspunkt unserer Darstellung bildet Gleichung (1), die hier der Einfachheit halber nochmals wiederholt wird:

$$P(t,m)=\frac{c}{(1+R_{t,1})}+\frac{c}{(1+R_{t,2})^2}+\dots$$
$$+\frac{c}{(1+R_{t,m})^m}+\frac{N}{(1+R_{t,m})^m}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{c}{(1+R_{t,k})^k}+\frac{N}{(1+R_{t,m})^m}.$$

In dieser Gleichung wird unterstellt, dass die Couponzahlungen im Abstand jeweils eines Jahres erfolgen – eine Annahme, die bei Obligationenanleihen, die am schweizerischen Kapitalmarkt emittiert werden, im Allgemeinen erfüllt ist. Weiter wird unterstellt, dass die erste Couponzahlung in genau einem Jahr fällig wird, was in der Regel allerdings kaum der Fall sein dürfte. Wenn der Zeitraum bis zur nächsten Couponzahlung unterjährig ist, muss Gleichung (1) deshalb als

$$(4)\quad P(t,m+\lambda)=c\sum_{k=0}^{m}d(t,k+\lambda)+d(t,m+\lambda),$$

geschrieben werden, wobei $0<\lambda<1$ den Zeitraum bis zur Ausschüttung des ersten Coupons als Bruchteil eines Jahres ausdrückt und der Rückzahlungsbetrag (hier mit dem Nennwert gleichgesetzt) gleich eins ist. Mit $d(t,k+\lambda)$ wird die Diskontfunktion bezeichnet, die als

$$(5)\quad d(t,k+\lambda)=\frac{1}{(1+\mathrm{R}(t,k+\lambda))^{(k+\lambda)}}$$
$$\textit{für } k=0,1,2,\dots,m \textit{ und } 0<\lambda<1,$$

definiert ist. Werden stetige Zinssätze unterstellt, so wird die Diskontfunktion zu

$$(6)\quad d(t,k+\lambda)=\exp\left(-R_s(t,k+\lambda)*(k+\lambda)\right)$$
$$\textit{für } k=0,1,2,\dots,m \textit{ und } 0<\lambda<1,$$

wobei $R_s(t,k+\lambda)$ den stetigen Kassazinssatz im Zeitpunkt t einer Diskontanleihe mit einer Laufzeit von $k+\lambda$ Jahren beschreibt. Die Diskontfunktion liefert also den Wert in t eines Ertrages, der in $k+\lambda$ Jahren anfällt.

Die Bestimmung des Preises einer Obligationenanleihe mit Hilfe von Gleichung (4) setzt voraus, dass die Kassazinssätze bekannt sind. Wir haben bereits erwähnt, dass auf dem schweizerischen Kapitalmarkt so gut wie keine Diskontanleihen gehandelt werden, so dass die Kassazinssätze nicht direkt beobachtet werden können. Die Kassazinssätze müssen deshalb aus den Preisen und den Merkmalen (Restlaufzeit, Couponsatz, Nennwert und Periodizität der Zinsausschüttungen) von Couponobligationen geschätzt werden. Die Nelson-Siegel-Svensson-Methode wendet dazu ein Regressionsverfahren an, wobei die folgende Funktion unterstellt wird:

$$f_{Svensson}(t,m,\beta) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\gamma_1 m) + \beta_2(\gamma_1 m)\exp(-\gamma_1 m) + \beta_3(\gamma_2 m)\exp(-\gamma_2 m). \tag{7}$$

Gleichung (7) bestimmt den augenblicklichen Terminzinssatz $f(t,m,\beta)$ als Funktion von m. Der Terminzinssatz ist die Rendite einer auf Termin gekauften Diskontanleihe, d.h. einer Diskontanleihe, die in t gehandelt (Datum des Kaufvertrages), in $T_1 \geq t$ geliefert (Datum der Erfüllung des Termingeschäfts, m Perioden nach t) und in $T_2 \geq T_1$ zurückgezahlt wird (Datum der Fälligkeit der Diskontanleihe). Der augenblickliche Terminzinssatz ist definiert als der Terminzinssatz einer Diskontanleihe, für die $T_2 \rightarrow T_1$. Mit anderen Worten handelt es sich um den heute, d.h. im Zeitpunkt t, bestimmten Zinssatz einer Investition, welche m Perioden nach t realisiert und sogleich wieder ausbezahlt werden wird.

Durch Integrieren von Gleichung (7) nach der Zeit (mit den Integrationsgrenzen t und $t+m$) und Dividieren durch m erhalten wir den Kassazinssatz in t für eine Diskontanleihe mit einer Restlaufzeit von m Jahren. Diese Beziehung zwischen Kassa- und Terminsatz lässt sich aus der folgenden Überlegung herleiten: Der Preis in t einer Diskontanleihe mit Fälligkeit in T (m Jahre vom Zeitpunkt t an) und der Auszahlung Eins muss gleich dem Preis einer alternativen mehrstufigen Anlagestrategie sein, in der ein Diskontpapier mit dem Verfallsdatum $T_1 < T$ gekauft wird und dazu eine Serie von auf Termin erworbenen Diskontanleihen, die so gestaffelt sind, dass das Verfalldatum einer Diskontanleihe jeweils mit dem Zeitpunkt der Fälligkeit des Termingeschäfts zum Erwerb der nächsten Diskontanleihe korrespondiert. Formal lässt sich diese Arbitragebeziehung wie folgt darstellen:

$$\begin{gathered} P(t,T) = P(t,T_1)\cdot P(t,T_1,T_2)\cdot P(t,T_2,T_3)\cdot\ldots\cdot P(t,T_{n-1},T) \\ \Rightarrow \\ e^{-R_s(t,T)[T-t]} = e^{-R_s(t,T_1)[T_1-t]} e^{-F_s(t,T_1,T_2)[T_2-T_1]} \ldots e^{-F_s(t,T_{n-1},T)[T-T_n]} \end{gathered} \tag{8}$$

mit $t = T_0 < T_1 < \ldots T_n = T$. Dabei bezeichnen $P(t,T_{i-1},T_i)$ für ($i = 1,2,\ldots,n$) den im Zeitpunkt t vereinbarten Preis für eine auf Termin (T_{i-1}) gekaufte Diskontanleihe, die im Zeitpunkt T_i bzw. T verfällt; $P(t,T)$ und $P(t,T_1)$ sind die Preise von Diskontanleihen mit Restlaufzeiten von ($T-t$) bzw. (T_1-t) Jahren und $R_s(t,T)$ bzw. $R_s(t,T_1)$ bezeichnen die entsprechenden stetigen Kassazinssätze. Ferner beschreibt $F_s(t,T_{i-1},T_i)$ den zum Zeitpunkt t gestellten stetigen Terminsatz für die Zeitperiode zwischen T_{i-1} und T_i.

Durch Logarithmieren von Gleichung (8) und unter Berücksichtigung der Beziehung $R_s(t,T_1) = F_s(t,t,T_1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} R_s(t,T)[T-t] &= F_s(t,T_0,T_1)[T_1-T_0] \\ &\quad + F_s(t,T_1,T_2)[T_2-T_1] + \ldots + F_s(t,T_{n-1},T_n)[T_n-T_{n-1}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_s(t,T_{i-1},T_i)[T_i-T_{i-1}] \end{aligned} \tag{9}$$

mit $t = T_0 < T_1 < \ldots T_n = T$. Wenn wir weiter annehmen, dass ausschliesslich in Anleihen mit gleich langen Laufzeiten $\Delta t = T_1 - t = T_1 - T_2 = \ldots = T_n - T_{n-1}$ investiert wird, so vereinfacht sich Gleichung (9) zu

$$R_s(t,T)[T-t] = \sum_{i=1}^{i=n} F_s(t,T_{i-1},T_i)\Delta t. \tag{10}$$

Falls $\Delta t \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$, kann die rechte Seite von Gleichung (10) als Integral geschrieben werden. Der Kassazinssatz für eine Diskontanleihe mit einer Restlaufzeit von $T-t$ Jahren ist damit

$$\begin{gathered} R_s(t,T)[T-t] = \int_{\tau=t}^{\tau=T} f_s(t,\tau)\delta\tau \\ \Rightarrow \\ R_s(t,T) = \frac{\int_{\tau=t}^{\tau=T} f_s(t,\tau)\delta\tau}{[T-t]}. \end{gathered} \tag{11}$$

Der augenblickliche Terminzinssatz $f_s(t,\tau) = F_s(t,\tau,\tau)$ bezeichnet den im Zeitpunkt t gestellten Terminzinssatz einer Diskontanleihe, die im Zeitpunkt $\tau \geq t$ beginnt (Fälligkeit des Termingeschäfts) und sofort wieder verfällt. Der Durchschnitt aller augenblicklichen Terminsätze zwischen den Zeitpunkten t und T ist somit der Kassazinssatz für ein Diskontpapier mit einer Laufzeit von $m \equiv (T-t)$ Jahren. Falls $\tau = t$, entspricht der augenblickliche Terminzinssatz $f_s(t,t)$ dem augenblicklichen Kassazinssatz $R_s(t,t)$.

Setzt man in Gleichung (11) t=0 und T=m sowie $f_{Svensson}(t,m,\beta)$ aus Gleichung (7) für $f_s(t,\tau)$, resultiert die Nelson-Siegel-Svensson-Funktion für den stetigen Kassazinssatz:

$$
\begin{aligned}
R_{Svensson}(t,m,\beta) &= \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m}\right)\\
&+ \beta_2\left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m} - \exp(-\gamma_1 m)\right)\\
&+ \beta_3\left(\frac{1-\exp(-\gamma_2 m)}{\gamma_2 m} - \exp(-\gamma_2 m)\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Gleichung (12) entspricht Gleichung (3) aus dem ersten Teil dieses Aufsatzes. Sie beschreibt die Kassazinssätze im Zeitpunkt t in Abhängigkeit von der Laufzeit m. Die Funktion erlaubt es, monoton steigende, monoton fallende, U-förmige, S-förmige sowie invertiert U-förmige und invertiert S-förmige Kurvenverläufe wiederzugeben. Sie ist genügend flexibel, um die am Markt beobachteten typischen Datenkonstellationen ausreichend exakt wiederzugeben.

Die Nelson-Siegel-Svensson-Funktion weist ökonomisch sinnvolle Grenzeigenschaften auf. Strebt die Laufzeit m einer Diskontanleihe gegen unendlich, so nähert sich der Kassazinssatz asymptotisch β_0 an. Nähert sich die Laufzeit m hingegen Null, so nimmt der Kassazinssatz, der nun dem augenblicklichen Kassazinssatz für den Zeitpunkt t entspricht, den Wert $\beta_0 + \beta_1$ an.

Wird die Zinsstruktur durch die Nelson-Siegel-Svensson-Funktion abgebildet, so können die Funktionswerte $R_{Svensson}(t,k+\lambda,\beta)$ aus Gleichung (12) für die Kassazinssätze $R(t,k+\lambda)$ für k=0,1,..,m in Gleichung (5) bzw. Gleichung (4) eingesetzt werden. Die zukünftigen Auszahlungen (Coupons und Nennwert) werden also mit den Kassazinssätzen aus der Nelson-Siegel-Svensson-Funktion abdiskontiert. Daraus ergibt sich der theoretische Preis einer Couponobligation $\hat{P}(t,m+\lambda) = P(\beta,t,m+\lambda)$ mit $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$:

$$\hat{P}(t,m+\lambda) = c\sum_{k=1}^{m}\hat{d}(t,k+\lambda) + \hat{d}(t,m+\lambda), \tag{13}$$

wobei

$$\hat{d}(t,k+\lambda) = \exp\big(-R_{Svensson}(t,k+\lambda,\beta)*(k+\lambda)\big) \quad \text{für } k = 0,1,2,\ldots,m. \tag{14}$$

2.2 Die Schätzmethode

Wir haben im Abschnitt 2.1 gesehen, dass der Preis einer Couponobligation, die am Fälligkeitstag den Betrag von Eins und an den Ausschüttungsdaten c ausbezahlt, eine Funktion der Parameter $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$, des Couponsatzes c und der Ausschüttungsdaten ist. Ziel der Schätzung ist es nun, die Parameter $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$ zu bestimmen.

Die Parameter werden für jeden Beobachtungszeitpunkt t separat geschätzt. In allen Schätzungen wird der Kassazinssatz für die Laufzeit von null Jahren durch den Tagesgeldzinssatz (Tomorrow-Next) restringiert. Das bedeutet, dass die Schätzung in dem Sinne restringiert wird, dass $\beta_0+\beta_1$ gleich dem Tomorrow-Next-Zinssatz ist. Minimiert werden die quadrierten Differenzen zwischen den beobachteten und den geschätzten Fälligkeitsrenditen r_i und $\hat{r}_i$ der n Couponobligationen.[7]

$$
\begin{aligned}
&r_i(t,m_i+\lambda_i) = \hat{r}_i(t,m_i+\lambda_i) + \varepsilon_r \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,n\\
&\varepsilon_r = i.d.d. \quad E(\varepsilon_r) = 0 \quad Var(\varepsilon_r) = \sigma_r^2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Die Renditeabweichungen ε_r können verschiedene Ursachen haben. Drei stehen im Vordergrund. Erstens kann ε_r Einflüsse auf den Zinsbildungsprozess widerspiegeln, die nicht vollständig durch das Arbitragemodell erfasst werden. Zweitens sind Differenzen zwischen den Zeitpunkten, zu denen die Transaktionen durchgeführt wurden, zu beachten. Drittens können Bonitätsunterschiede zwischen den Papieren, die einer bestimmten Schuldnerkategorie zugeordnet werden, eine Rolle spielen. In diesem Fall wäre allerdings die in Gleichung (15) getroffene Annahme, dass die Abweichungen zwischen beobachteten und theoretischen Renditen unabhängig und identisch verteilt sind, nicht mehr gesichert.

7 Eine Alternative besteht darin, statt die Fehler auf den Fälligkeitsrenditen die Fehler auf den Preisen (quadrierte Differenzen zwischen den beobachteten Preisen und den geschätzten Preisen) zu minimieren. Fälligkeitsrenditen sind im Grunde nur eine andere Form, den Preis einer Obligation auszudrücken. Allerdings reagiert die Fälligkeitsrendite auf Änderungen der Preise bei kurzfristigen Anleihen sehr elastisch. Eine Differenz zwischen dem beobachteten und dem geschätzten Preis hat bei einer Anleihe mit geringer Laufzeit die grösseren Auswirkungen auf die Differenz zwischen beobachteter und geschätzter Rendite als dies bei einem Papier mit einer sehr langen Laufzeit der Fall ist. Diesem unerwünschten Effekt wird in der Regel damit begegnet, dass eine gewichtete Preisminimierung vorgenommen wird (siehe z. B. Ricart und Sicsic, 1995).

Bei der Renditenminimierung müssen die Parameter iterativ durch eine Optimierungsprozedur so bestimmt werden, dass die Summe der quadrierten Differenzen von beobachteten und geschätzten Fälligkeitsrenditen minimiert wird. In einem ersten Schritt wird dazu der Parametervektor β_t = $(\beta_{0t},\beta_{1t},\beta_{2t},\beta_{3t},\gamma_{1t},\gamma_{2t})$ mit plausiblen Werten (die SNB verwendet die Vortagesendwerte) initialisiert. Anschliessend wird die Optimierungsprozedur mit dem Simplex-Verfahren so lange fortgesetzt, bis das Konvergenzkriterium erfüllt ist. Die resultierenden Parameterwerte werden anschliessend als neue Startwerte für eine Optimierung mit dem BHHH-Verfahren benützt.[8] Die Optimierungsprozedur wird wiederum so lange fortgesetzt, bis das Konvergenzkriterium erfüllt ist.

Die Optimierung durchläuft unabhängig davon, ob das Simplex- oder das BHHH-Verfahren angewandt wird die gleichen Schritte. Diese lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Initialisieren der Parameter $\beta_t = (\beta_{0t},\beta_{1t},\beta_{2t},\beta_{3t},\gamma_{1t},\gamma_{2t})$ für $t = 1$.
2. Berechnung der theoretischen Kassasätze $R_{Svensson,t}(k+\lambda_i,\beta_t)$ für $k=0,1,..,m_i$ und $i=1,2,...,n$ nach (12).
3. Berechnung der theoretischen Diskontfaktoren $\hat{d}_{it}(k+\lambda_i)=d_{it}(k+\lambda_i,\beta_t)$ für $k=0,1,..,m_i$ und $i=1,2,...,n$ nach (14).
4. Berechnung der theoretischen Preise $\hat{P}_{it}(m_i+\lambda_i) = P_{it}(m_i+\lambda_i,\beta_t)$ für $i=1,2,...,n$ nach (13).
5. Berechnung der theoretischen Renditen nach Fälligkeit $\hat{r}_{it}(m_i+\lambda_i)=r_{it}(m_i+\lambda_i,\beta_t)$ nach (4) unter Verwendung des Newton-Raphson-Verfahrens.
6. Berechnung des Zielfunktionswertes $\sum_{i=1}^{n}(r_{it}(m_i+\lambda_i) - \hat{r}_{it}(m_i+\lambda_i))^2$ (Summe der quadrierten Differenzen zwischen beobachteter und geschätzter Rendite) unter Verwendung des Simplex- bzw. des BHHH-Vefahrens zur Bestimmung eines neuen β_{t+1}.
7. Überprüfung des Konvergenzkriteriums: $(\beta_{t+1}-\beta_t)'(\beta_{t+1}-\beta_t) < \alpha \textit{ für } \alpha > 0$.
8. Falls Konvergenzkriterium nicht erfüllt: zurück zu Schritt 2 mit β_{t+1} als neuem Parametervektor für β_t.

Die Vertrauensintervalle für die geschätzten Preise, Kassa- und Terminsätze sowie Renditen nach Fälligkeit werden mit der sogenannten Delta-Methode berechnet.[9] Der Erklärungsgehalt der Schätzgleichung wird mit dem «Root Mean Squared Yield Error» (RMSYE) evaluiert. Alle Schätzungen werden gegenwärtig mit der Software RATS durchgeführt.

8 für das BHHH-Verfahren siehe Berndt, Hall, Hall und Hausman (1974)

9 Siehe z.B. Greene (1993, Seite 297)

Literaturverzeichnis

Berndt, E.K., Hall, B.H., Hall, R.E. und Hausman, J.A. 1974. Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models. *Annals of Economic and Social Measurement* 3: 653–665.

Bodie, Z. und Merton, R.C. 1998. *Finance*. London: Prentice-Hall.

Campbell, J.Y., Lo, A.W. und MacKinlay, C.A. 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.

Greene, W.H. 1997. *Econometric Analysis*. London: Prentice-Hall.

Heller, D. 1997. Zinskurven und ihr Informationsgehalt für die Geldpolitik der SNB. *Geld, Währung und Konjunktur* (Quartalsheft der Schweizerischen Nationalbank) 15(2): 167–176.

Hull, J.C. 1997. *Options, Futures, and other Derivatives*. London: Prentice-Hall.

Nelson, C.R. und Siegel, A.F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business* 60: 473–489.

Ricart, R. und Sicsic, P. 1995. Estimating the Term Structure of Interest Rates from French Data. Banque de France *Bulletin Digest* 22: October.

Svensson, L.E.O. 1994. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994. NBER Working Paper Series Nr. 4871.

Svensson, L.E.O. 1995. Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method. *Sveriges Riksbank Quarterly Review* 3: 13–26.